29/10/19

Περίληψη: N-διάστατος δ.χ. ($N<\infty$)

Αν S είναι N-διάστατος δ.χ. εφοδιασμένος με εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να κατασκευάσουμε ορθοκανονική βάση $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$. Τότε Τ.Α.Ε.Ι.:

α) Το σύστημα $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ αποτελεί βάση του S

β) Το σύστημα $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N}$ είναι πλήρες

γ) Η σχέση $\langle e_i|x\rangle = 0$, $\forall i=1,\dots,N \Rightarrow |x\rangle = 0$

δ) $|x\rangle \in S \Rightarrow |x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle e_i|x\rangle \cdot |e_i\rangle$, όπου $\langle e_i|x\rangle = x_i$ συνιστώσες

ε) $|x\rangle, |y\rangle \in S \Rightarrow \langle y|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle y|e_i\rangle \cdot \langle e_i|x\rangle$, Parseval

στ) $|x\rangle \in S \Rightarrow \langle x|x\rangle = \sum_{i=1}^{N} |\langle e_i|x\rangle|^2$

"Δ.χ. απείρων διαστάσεων"

(...)

ΠΑΡΑΔ. είναι ο δ.χ. F των συνεχών συν/σεων σε $[a,b]$. Εδώ τα $|f\rangle$ κ. $|g\rangle$ είναι $f(x), g(x)$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, όμοια κ' η $g(x)$, $x\in[a,b]$

- Ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο:

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b w(x) f^*(x) g(x)\, dx$$

$w(x)$: πραγματική, θετική, συνεχής συν/ση στο $[a,b]$ κ' καλείται συν/ση πυκνότητας ή βάρους.

Σ' αυτόν τον χώρο F, ορίζουμε ορθοκανονικά διαν/τα $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ που αντιστοιχούν στις συν/σεις $e_1(x), e_2(x), \dots, e_k(x), \dots$ που έχουν την ιδιότητα:

$$\langle e_k|e_m\rangle = \int_a^b w(x) e_k^*(x) e_m(x)\, dx = \delta_{km} = \begin{cases} 1, & k=m \\ 0, & k\neq m \end{cases}$$

Μπορώ να ολοκληρώσω κ' ασυνεχείς συναρτήσεις, αρκεί να $\exists$ πεπερασμένος πλήθος ασυνεχειών

Ανισότητα Cauchy - Schwartz

Για τον δ.χ. F, θα είναι: $|\langle f|g\rangle|^2 \leq \langle f|f\rangle\langle g|g\rangle$,

ή $$\left|\int_a^b f^*(x)g(x)w(x)dx\right|^2 \leq \int_a^b w(x)|f(x)|^2dx \cdot \int_a^b w(x)|g(x)|^2dx$$

Απόσταση, ρ, μεταξύ διανυσμάτων

Η απόσταση, ρ, μεταξύ των διανυσμάτων $|f\rangle$ κ. $|g\rangle \in F$ ορίζεται ως: $\rho(|f\rangle, |g\rangle) = \sqrt{(\langle f| - \langle g|)(|f\rangle - |g\rangle)}$.

$|f\rangle = f(x)$, $|g\rangle = g(x) \in F$

$$\downarrow$$

$$\rho^2(|f\rangle, |g\rangle) = \int_a^b w(x)\cdot|f(x)-g(x)|^2dx$$

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Θα λέμε ότι μια ακολουθία διανυσμάτων, $|f_n\rangle$, συγκλίνει σ' ένα διάνυσμα, $|f\rangle$, αν-ν

$$\lim_{n\to\infty}\rho(|f_n\rangle, |f\rangle) = 0 \quad \left(|f_n\rangle \xrightarrow[\text{ισχυρά}]{n\to\infty} |f\rangle\right)$$

Η σύγκλιση αυτή λέγεται μέση σύγκλιση, ή ισχυρή σύγκλιση, ή μέση τιμή

$\boxed{\text{Π.χ.}}$ $|f_n\rangle = f_n(x) = x^n$, $\frac{1}{x^n}$

Πρόταση: Το όριο $|f_n\rangle \to |f\rangle$, εφόσον $\exists$ είναι μονοσήμαντα ορισμένο

Αποδ.:

Έστω ότι $\exists$ κ' ένα άλλο το $|f'\rangle$, τ.ω. $|f_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} |f'\rangle$.

Από τριγωνική ιδιότητα:

$$\rho(|f\rangle, |f'\rangle) \leq \rho(|f_n\rangle, |f\rangle) + \rho(|f_n\rangle, |f'\rangle)$$

Τότε αφού $\lim_{n\to\infty} \rho(|f_n\rangle, |f\rangle) = 0 = \lim_{n\to\infty} \rho(|f_n\rangle, |f'\rangle)$

έχουμε ότι $\rho(|f\rangle, |f'\rangle) = 0$,

άρα το όριο είναι μοναδικό ∎

Για τον δ.χ. F, $|f_n\rangle = f_n(x)$, $|f\rangle = f(x)$, η σύγκλιση στη μέση τιμή σημαίνει ότι:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b w(x) \cdot |f(x) - f_n(x)|^2 \, dx = 0$$

- **ΟΡΙΣΜΟΣ**: (βασική ακολουθία)

Μια ακολουθία διαν/των $|f_n\rangle \in H$, $n = 1, 2, \dots$ λέγεται βασική, αν η απόσταση μεταξύ των $|f_n\rangle$ κ' $|f_m\rangle$, $n, m \to \infty$, γίνεται μηδέν, δηλ.

$$\rho(|f_n\rangle, |f_m\rangle) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$$

- **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Ένας χώρος, H, λέγεται πλήρης, αν κάθε βασική ακολουθία διαν/των του συγκλίνει σε όριο που ανήκει στον H.

"Βασικές σχέσεις - πληρότητα"

Στο κεφάλαιο αυτό όταν μιλάμε για χώρους H (Hilbert) θα θεωρούμε χώρους άπειρων διαστάσεων

<u>Ανισότητα Bessel</u>: Ο δ.χ. H είναι εφοδιασμένος μ' ένα σύστημα $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2,\dots}$ τ.ω. $\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$

Τότε η ανισότητα Bessel

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle a|e_i\rangle \cdot \langle e_i|a\rangle \leq \langle a|a\rangle$$

ή

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 \leq \langle a|a\rangle$$

Η παραπάνω ανισότητα ισχύει ∀ ορθοκανονικό σύστημα κ' είναι γνωστή ως ανισότητα Bessel

<u>Σχέση Parseval</u>: $\sum_{i=1}^{\infty} \langle a|e_i\rangle \cdot \langle e_i|a\rangle = \langle a|a\rangle$

(*) ή $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 = \langle a|a\rangle$, εξίσωση Parseval

Ειδική περίπτωση της ανισ. Bessel (πλήρες ορθοκανονικό σύστημα).

Η σχέση αυτή (*) αποτελεί γενίκευση του <u>Πυθαγορείου θεωρήματος</u>

<u>Πληρότητα ορθοκαν. συστήματος</u>:

• <u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Ένας χώρος, H, είναι ένας δ.χ. εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο τ.ω. η μετρική νόρμα του $||a||^2 = \langle a|a\rangle$ μετατρέπει τον χώρο σε <u>πλήρη μετρικό χώρο</u>

• **ΟΡΙΣΜΟΣ**: Ένα ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2,\dots}$ σ' ένα χώρο H, αποτελεί βάση του χώρου αν:

$\langle a|e_i\rangle = 0 \quad \forall i = 1,2,\dots \Rightarrow |a\rangle = |0\rangle$

Ένα τέτοιο σύστημα λέγεται πλήρες.

$\Downarrow$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Ένα ορθοκανονικό σύστημα διανυσμάτων $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2,\dots}$ σ' ένα χώρο H, αποτελεί βάση σ' αυτόν αν-ν ισχύει η σχέση Parseval $\forall |a\rangle \in H$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle a|e_i\rangle \cdot \langle e_i|a\rangle = \langle a|a\rangle$$

ΑΠΟΔ.

$\Rightarrow$) Έστω $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2,\dots}$ είναι ορθοκαν. βάση του H.

Τότε $\langle b|e_i\rangle = 0, \ \forall i \Rightarrow |b\rangle = |0\rangle$

Έστω τυχαίο διάνυσμα $|a\rangle \in H$.

Κατασκευάζω το διάνυσμα $|b\rangle$

$$|b\rangle = |a\rangle - \sum_{i=1}^{\infty} a_i |e_i\rangle, \quad a_i = \langle e_i|a\rangle$$

Τότε $\langle b|e_j\rangle = \left(\langle a| - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* \langle e_i|\right) \cdot |e_j\rangle$

τυχαίο διάν/μα της βάσης

$$= \underbrace{\langle a|e_j\rangle}_{=a_j^*} - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* \langle e_i|e_j\rangle$$

$$= a_j^* - \sum_{i=1}^{\infty} a_i^* \delta_{ij}, \quad \text{για τυχαίο } j$$

$$= a_j^* - a_j^* = 0$$

$\xRightarrow{\text{για τυχαίο } j}$ $\langle b|e_j\rangle = 0$, άρα $|b\rangle = |0\rangle$

άρα $|a\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} a_i |e_i\rangle$

κ' κατά συνέπεια ισχύει η σχέση P.

$(\Leftarrow)$ Έστω ότι ισχύει: $\langle a|a\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_i|a\rangle|^2$, $\forall |a\rangle \in H$

$\exists |b\rangle \in H$ τ.ω. $\langle e_i|b\rangle = 0$ για όλα τα $|e_i\rangle$, $i=1,2,\ldots$

$$\langle b|b\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle e_i|b\rangle|^2 = 0$$

άρα $|b\rangle = |0\rangle$

Δηλ. το σύστημα $\{|e_i\rangle\}_{i=1,2,\ldots}$ αποτελεί βάση του H ∎

$\boxed{\text{Π.χ.}}$ Στον δ.χ. F γράφουμε:

$$\langle f|f\rangle = \int_a^b w(x)\cdot|f(x)|^2\,dx$$

$$|f\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} f_i|e_i\rangle \quad \text{αντίσ.} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i e_i(x)$$

όπου $f_i = \int_a^b w(x)\, e_i^*(x)\, f(x)\,dx$

<u>Bessel</u>: $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^2 \le \langle f|f\rangle = \int_a^b w(x)\cdot|f(x)|^2\,dx$